

Matematika Diskret

Mahmud 'Imrona

2002

Daftar Isi
Daftar Gambar
Daftar Tabel

Kata Pengantar

Dengan harapan mahasiswa mempunyai kesempatan untuk mengikuti kuliah dengan baik, tanpa terganggu untuk menulis, dan aktifitas yang lain, maka buku ini disusun, sehingga mahasiswa di dalam kelas benar-benar hanya mencatat hal-hal yang dianggap penting saja, sedangkan catatan cukup dari buku ajar ini saja.

Di lain pihak, dengan mengingat bahwa kuliah di dalam kelas terbatas waktu, maka latihan soal tentunya menjadi tidak terlalu banyak. Buku ini disusun dengan memuat soal-soal dengan jumlah yang cukup banyak dan dengan sebaran tingkat kesulitan yang cukup lebar, mulai dari yang sangat mudah sampai dengan soal yang mempunyai tingkat kesulitan sangat sukar.

Buku ini disusun dalam empat bagian utama, yaitu: Teori Himpunan dan Relasi, yang meliputi: Dasar-dasar teori himpunan, Fungsi dan Relasi, Terurut Parsial, Relasi Ekuivalensi, Himpunan Fuzzy dan Logika Fuzzy Struktur Aljabar, yang meliputi: Semi group, monoids, group, homomorphisme, relasi kongruen Kombinatorial, yang meliputi: Aturan Perkalian, Sample Terurut dan Permutasi, Sample tak Terurut tanpa Pengulangan, Sample tak Terurut dengan Pengulangan Graph, yang meliputi: Keterhubungan, Graph Planar, Representasi Komputer untuk Graph, Path, Cycle, Tree dan Spanning Tree, masalah minimal spanning Tree, Tree biner dan penelusurannya, algoritma Dijkstra.

Bagian I
Teori Himpunan dan Relasi

Bab 1

Teori Himpunan

1.1 Pengertian dan Jenis-jenis Himpunan

Himpunan dalam matematika tidak didefinisikan, istilah himpunan dianggap sudah dipahami oleh setiap matematikawan, yang biasa diistilahkan dengan pengertian. Himpunan ditentukan oleh adanya anggota, hubungan antara himpunan dan anggotanya inilah yang menjadi perbedaan antara satu himpunan dengan himpunan yang lain.

Contoh 1 *Himpunan*

Misalkan A = himpunan semua mahasiswa STT Telkom, jelas anggota himpunan ini dapat dibedakan dengan unsur yang bukan anggota himpunan. Seperti kursi jelas bukan anggota himpunan A , vektor $a=(1, 2, 3)$ jelas pula bukan anggota A . Tetapi si Della jelas anggota himpunan A , karena mempunyai NIM 613010027, begitupun si Amir yang mempunyai NIM 113010056, jelas pula anggota himpunan A , walaupun sekaligus dia mahasiswa PAAP UNPAD dengan NIM PA000234.

Suatu himpunan dapat disajikan dalam dua bentuk, yaitu:

- a. Dengan menguraikan unsur-unsurnya (Principle of Extension) ,

Contoh 2 *Principle of Extension*

$$A=\{1, 2, 3\}$$

- b. Dengan menyebutkan kriterianya (Principle of Abstraction),

Contoh 3 *Principle of Abstraction*

$$A=\{x \in \mathbb{Z} | x^2 - 3x - 4 = 0\}$$

Lambang himpunan menggunakan huruf kapital, sedangkan anggota suatu himpunan menggunakan huruf kecil. Lambang anggota adalah \in .

Contoh 4 Anggota

$$2 \in \mathbb{Z},$$

berarti angka dua anggota dari \mathbb{Z} (\mathbb{Z} menyatakan himpunan bilangan bulat). Sedangkan untuk menyatakan bukan anggota, dinyatakan oleh \notin .

Contoh 5 Bukan Anggota

$$0,5 \notin \mathbb{Z},$$

artinya: 0,5 bukan anggota himpunan bilangan bulat.

Untuk himpunan yang berhingga, yaitu: himpunan yang banyaknya anggota berhingga, dikenal istilah kardinalitas (lambang: n), yaitu menyatakan banyaknya anggota suatu himpunan.

Contoh 6 Kardinalitas

$$A = \{2, 5, 7\}, \text{ kardinalitas } A = n(A) = 3.$$

Himpunan yang tidak mempunyai anggota disebut himpunan kosong dengan lambang $\{\}$ atau \emptyset . Sehingga $n(\emptyset)=0$. Sedangkan himpunan yang anggotanya melingkupi semua anggota suatu himpunan disebut himpunan semesta (universal set),

Contoh 7 Himpunan Semesta

Jika $A=\{1, 2, 3\}$, maka himpunan semestanya dapat diambil $U = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

Di dalam sistem bilangan, dikenal lambang-lambang himpunan bilangan, yaitu: \mathbb{R} menyatakan lambang himpunan semua bilangan riil, \mathbb{Z} menyatakan lambang himpunan bilangan bulat, sedangkan \mathbb{N} menyatakan himpunan bilangan Natural (Asli), \mathbb{Q} menyatakan himpunan bilangan Rasional, dan \mathbb{I} menyatakan himpunan Irasional.

Definisi 8 Himpunan Sama atau Ekuivalen

Himpunan A dan B disebut dua himpunan yang sama, jika setiap unsur (anggota) himpunan A juga menjadi unsur (anggota) B , begitupun sebaliknya, setiap anggota B juga menjadi anggota A .

Di dalam himpunan tidak dikenal urutan anggota. Jadi, $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{3, 1, 2\}$, keduanya adalah sama. Begitupun tidak mengenal duplikasi anggota, sehingga $C=\{a, a, a, b, c, b, c\}$ sama dengan $D=\{a, b, c\}$.

Gambar 1.1: $A \subseteq B$

Definisi 9 Himpunan bagian atau Sub Set

Himpunan A disebut sub himpunan B , jika setiap anggota A juga anggota himpunan B , dilambangkan dengan $A \subseteq B$.

Dengan demikian, himpunan kosong merupakan sub himpunan dari setiap himpunan, karena setiap anggota himpunan kosong menjadi anggota dari setiap himpunan. Sebaliknya, jika A bukan himpunan bagian dari B , dilambangkan dengan $A \not\subseteq B$. Jika $A \subseteq B$ dan $A \neq B$, maka $A \subset B$, disebut himpunan bagian murni (**proper subset**).

Contoh 10 Himpunan Bagian

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ dan $B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, maka $A \subset B$.

Dengan menggunakan diagram Venn dapat diilustrasikan seperti pada Gambar 1.1.

Dengan konsep himpunan bagian, maka $A = B$ dapat dinyatakan sebagai $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$.

Definisi 11 Himpunan kuasa atau Power Set

Himpunan kuasa dari himpunan A adalah himpunan yang anggotanya semua himpunan bagian yang mungkin terjadi dari himpunan A , dengan lambang $P(A)$.

Contoh 12 Himpunan Kuasa

$A = \{1, 2, 3\}$ himpunan bagian yang mungkin terjadi adalah: $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$, sehingga $P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$. Sehingga $n(P(A)) = 8$.

Latihan 13 1. Jika $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{-2, -1, 1, 0, 3, 2\}$, maka di antara pernyataan-pernyataan di bawah ini, manakah yang benar?

- a. $1 \in A$
 - b. $-2 \in B$
 - c. $-2 \notin A$
 - d. $\emptyset \in A$
 - e. $\emptyset \subset B$
 - f. $A \subset B$
 - g. $B \not\subseteq A$
 - h. $\{2, 3\} \subseteq A$
 - i. $\{\emptyset, 2\} \subseteq A$
 - j. $\{-1, 1\} \subseteq A$
2. Jika $A = \{2, e\}$
 3. Jika $B = \{3, a, b\}$

1.2 Operasi Himpunan

Definisi 14 *Union* atau *Gabungan*

Gabungan himpunan A dan B adalah himpunan yang anggota-anggotanya terdiri dari anggota himpunan A atau anggota himpunan B, yang dilambangkan oleh $A \cup B$.

Dengan meminjam notasi pada logika gabungan A dan B dapat ditulis, sebagai berikut:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

Contoh 15 *Gabungan*

Jika $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{-1, 0, 2, 3\}$, maka $A \cup B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$

Dengan menggunakan diagram Venn dapat diilustrasikan seperti pada Gambar 1.2.

Definisi 16 *Intersection* atau *Irisan*

Irisan himpunan A dan B adalah himpunan yang anggota-anggotanya terdiri dari anggota himpunan A yang sekaligus menjadi anggota himpunan B, yang dilambangkan oleh $A \cap B$.

Dengan notasi logika irisan dari himpunan A dan B dapat ditulis, sebagai berikut:

Gambar 1.2: $A \cup B$

Gambar 1.3: $A \cup B$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

Contoh 17 Irisan

Jika $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{-1, 0, 2, 3\}$, maka $A \cap B = \{2, 3\}$

Dengan menggunakan diagram Venn dapat diilustrasikan seperti pada Gambar 1.3.

Definisi 18 Difference atau Selisih

Selisih himpunan A dengan himpunan B adalah himpunan yang anggotanya terdiri dari anggota himpunan A , tetapi bukan anggota himpunan B , yang dilambangkan oleh $A - B$.

Dengan meminjam notasi pada logika selisih antara A dan B dapat ditulis, sebagai berikut:

$$A - B = \{x \mid x \in A \vee x \notin B\}$$

Contoh 19 Selisih

Jika $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{-1, 0, 2, 3\}$, maka $A - B = \{1\}$

Gambar 1.4: $A - B$

Selisih disebut juga komplemen relatif, sehingga selisih antara A dan B dapat dibaca sebagai komplemen A relatif terhadap B.

Dengan menggunakan diagram Venn dapat diilustrasikan seperti pada Gambar 1.4.

Definisi 20 *Complement* atau *Komplemen*

Komplemen himpunan A adalah himpunan yang anggota-anggotanya terdiri dari anggota himpunan semesta (Universal Set), tetapi bukan anggota A, yang dilambangkan oleh A^C .

Dengan meminjam notasi pada logika, komplemen A dapat ditulis, sebagai berikut:

$$A^C = \{x \in U \mid x \notin A\}$$

Contoh 21 *Komplemen*

Jika $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dan $A = \{2, 3\}$, maka $A^C = \{1, 4, 5\}$

Dengan menggunakan diagram Venn dapat diilustrasikan seperti pada Gambar 1.5.

Definisi 22 *Symmetric Difference* atau *Selisih Simetri*

Selisih Simetri himpunan A dan B adalah himpunan yang anggota-anggotanya terdiri dari anggota himpunan A atau anggota himpunan B, tetapi bukan anggota himpunan A yang sekaligus anggota himpunan B, yang dilambangkan oleh $A \oplus B$.

Dengan meminjam notasi pada logika, Selisih Simetri A dan B dapat ditulis, sebagai berikut:

$$A \oplus B = \{x \mid (x \in A \vee x \in B) \wedge x \notin A \cap B\}$$

Gambar 1.5: A^C

Gambar 1.6: $A \oplus B$

Contoh 23 *Selisih Simetri*

Jika $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dan $B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$, maka $A \oplus B = \{-1, 0, 4\}$

Dengan menggunakan diagram Venn dapat diilustrasikan seperti pada Gambar 1.6.

1.3 Sifat-sifat Operasi Himpunan

Hukum Idempotent	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$
Hukum Asosiatif	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Hukum Komutatif	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
Hukum Distributif	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Hukum Identitas	$A \cup \emptyset = A$ $A \cap U = A$ $A \cup U = U$ $A \cap \emptyset = \emptyset$
Hukum Involusi	$(A^C)^C = A$
Hukum Komplemen	$A \cup A^C = U$ $A \cap A^C = \emptyset$ $U^C = \emptyset$ $\emptyset^C = U$
Dalil De Morgan	$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

Definisi 24 *Dual* E^* dari sebuah persamaan himpunan E adalah persamaan himpunan yang didapat dari menggantikan setiap operasi \cup dengan \cap , setiap operasi \cap dengan \cup , setiap himpunan semesta U dengan \emptyset , dan setiap himpunan kosong \emptyset dengan himpunan semesta U .

Contoh 25 *Dual*

$A \cup A = A$, maka dual dari persamaan ini adalah: $A \cap A = A$.

$A \cap \emptyset = \emptyset$, maka dual persamaan ini adalah: $A \cup U = U$.

1.4 Multi Set (Himpunan Ganda)

Tidak seperti konsep himpunan yang biasa yang tidak memperhatikan duplikasi anggota, himpunan ganda (multiset) sangat mementingkan duplikasi anggota.

Definisi 26 *Himpunan Ganda* atau *Multi set* adalah himpunan yang dilengkapi dengan multiplisitas. Bilangan multiplisitas ini adalah bilangan bulat tak negatif.

Jika multiplisitasnya nol berarti bukan anggota, sedangkan jika multiplisitasnya 1, seperti pada himpunan yang biasa. Secara umum notasi multiset adalah: $\{m_1 \bullet a_1, m_2 \bullet a_2, \dots, m_r \bullet a_r\}$, dimana m_1, m_2, \dots, m_r menyatakan multiplisitas masing-masing anggota.

Contoh 27 Himpunan Ganda

$A = \{3 \bullet a, 2 \bullet b, 4 \bullet c\}$. Jika dituliskan dengan cara mendaftarkan setiap anggotanya, himpunan $A = \{a, a, a, b, b, c, c, c\}$. Sehingga $n(A) = 9$.

Definisi 28 Union atau Gabungan dari multiset A dan multiset B adalah multiset dengan anggota yang terdiri dari anggota multiset A dan anggota multiset B dengan multiplisitas dipilih yang maksimum. Lambang: $A \cup B$

Contoh 29 Gabungan Himpunan Ganda

Jika $A = \{3 \bullet a, 2 \bullet b, 4 \bullet c\}$ dan $B = \{5 \bullet a, 1 \bullet b, 4 \bullet c, 2 \bullet d\}$ maka $A \cup B = \{5 \bullet a, 2 \bullet b, 4 \bullet c, 2 \bullet d\}$.

Definisi 30 Intersection atau Irisan dari multiset A dan multiset B adalah multiset dengan anggota yang terdiri dari anggota multiset A dan anggota multiset B dengan multiplisitas dipilih yang minimum. Lambang: $A \cap B$

Contoh 31 Irisan Himpunan Ganda

Jika $A = \{3 \bullet a, 2 \bullet b, 4 \bullet c\}$ dan $B = \{5 \bullet a, 1 \bullet b, 4 \bullet c, 2 \bullet d\}$ maka $A \cap B = \{3 \bullet a, 1 \bullet b, 4 \bullet c\}$. $d \notin A \cap B$ karena multiplisitas d pada multiset A adalah 0, sehingga yang minimum dari 0 dan 2 adalah 0.

Definisi 32 Difference atau Selisih dari multiset A dan multiset B adalah multiset dengan anggota yang terdiri dari anggota multiset A dan anggota multiset B dengan multiplisitas anggota A dikurangi multiplisitas anggota multiset B untuk anggota yang sama, jika multiplisitasnya negatif dianggap mempunyai multiplisitas 0. Lambang: $A - B$

Contoh 33 Selisih Himpunan Ganda

Jika $A = \{3 \bullet a, 2 \bullet b, 4 \bullet c\}$ dan $B = \{5 \bullet a, 1 \bullet b, 4 \bullet c, 2 \bullet d\}$ maka $A - B = \{1 \bullet b\}$.

Definisi 34 Sum atau Jumlah dari multiset A dan multiset B adalah multiset dengan anggota yang terdiri dari anggota multiset A dan multiset B , dengan multiplisitas ditambahkan. Lambang: $A + B$

Contoh 35 Jumlah Himpunan Ganda

Jika $A = \{3 \bullet a, 2 \bullet b, 4 \bullet c\}$ dan $B = \{5 \bullet a, 1 \bullet b, 4 \bullet c, 2 \bullet d\}$ maka $A + B = \{8 \bullet a, 3 \bullet b, 8 \bullet c, 2 \bullet d\}$.

1.5 Fuzzy Set (Himpunan Fuzzy)

Himpunan Fuzzy adalah himpunan yang dilengkapi dengan derajat keanggotaan, yang berupa bilangan riil dari 0 sampai dengan 1.

Contoh 36 *Himpunan Fuzzy*

A = himpunan kelulusan mahasiswa pada semester tertentu untuk matakuliah matematika diskret = {0.25 Anton, 0.5 Enny, 0.0 Rito, 0.75 Setyo, 1.0 Bambang} dengan himpunan ini berarti dapat dibaca Anton lulus dengan nilai D , Setyo lulus dengan nilai B , Bambang lulus dengan nilai A , Rito tidak lulus nilai E , sedangkan Enny lulus dengan nilai C . Derajat keanggotaan untuk kasus ini ditentukan dari nilai matakuliah ada lima jenis, yaitu: A , B , C , D , dan E dengan nilai konversi berturut-turut 4, 3, 2, 1, dan 0.

Definisi 37 *Complement atau Komplemen*

komplemen himpunan fuzzy A adalah himpunan fuzzy yang anggota-anggotanya terdiri dari anggota himpunan A dengan derajat keanggotaan 1 dikurangi derajat keanggotaannya, dilambangkan oleh A^C .

Contoh 38 *Komplemen Himpunan Fuzzy*

Jika A menyatakan himpunan kelulusan mahasiswa pada semester tertentu untuk matakuliah matematika diskret = {0.25 Anton, 0.5 Enny, 0.0 Rito, 0.75 Setyo, 1.0 Bambang}, maka $A^C = \{0.75 \text{ Anton, } 0.5 \text{ Enny, } 1.0 \text{ Rito, } 0.25 \text{ Setyo, } 0.0 \text{ Bambang}\}$. Dalam hal ini A^C dapat pula diartikan sebagai himpunan ketidaklulusan mahasiswa pada semester tertentu untuk matakuliah matematika diskret.

Definisi 39 *Union atau Gabungan*

Gabungan himpunan fuzzy A dan B adalah himpunan fuzzy yang anggota-anggotanya terdiri dari anggota himpunan A atau anggota himpunan B dengan derajat keanggotaan yang maksimum, yang dilambangkan oleh $A \cup B$.

Contoh 40 *Gabungan Himpunan Fuzzy*

Jika A menyatakan himpunan kelulusan mahasiswa pada semester tertentu untuk matakuliah matematika diskret = {0.25 Anton, 0.5 Enny, 0.0 Rito, 0.75 Setyo, 1.0 Bambang} sedangkan B menyatakan himpunan kelulusan mahasiswa pada semester tertentu untuk matakuliah logika matematika = {0.5 Anton, 0.25 Enny, 0.75 Rito, 0.75 Setyo, 0.5 Bambang}, maka $A \cup B = \{0.5 \text{ Anton, } 0.5 \text{ Enny, } 0.75 \text{ Rito, } 0.75 \text{ Setyo, } 1.0 \text{ Bambang}\}$

Definisi 41 *Intersection atau Irisan*

Irisan himpunan fuzzy A dan B adalah himpunan fuzzy yang anggota-anggotanya

terdiri dari anggota himpunan A yang sekaligus menjadi anggota himpunan B dengan derajat keanggotaan yang minimum, yang dilambangkan oleh $A \cap B$.

Contoh 42 Irisan Himpunan Fuzzy

Jika A menyatakan himpunan kelulusan mahasiswa pada semester tertentu untuk matakuliah matematika diskret = {0.25 Anton, 0.5 Enny, 0.0 Rito, 0.75 Setyo, 1.0 Bambang} sedangkan B menyatakan himpunan kelulusan mahasiswa pada semester tertentu untuk matakuliah logika matematika = {0.5 Anton, 0.25 Enny, 0.75 Rito, 0.75 Setyo, 0.5 Bambang}, maka $A \cap B = \{0.25 Anton, 0.5 Enny, 0.0 Rito, 0.75 Setyo, 0.5 Bambang\}$

Bab 2

Fungsi dan Relasi

2.1 Fungsi

2.2 Relasi

Definisi 43 Hasil Kali Cartesian

Misalkan A dan B himpunan. Hasil kali Cartesian A dan B adalah himpunan yang anggotanya adalah semua pasangan terurut yang mungkin terbentuk dari A dan B .

Contoh 44 Hasil Kali Cartesian

Jika $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{a, b, c, d\}$, maka $A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (1, d), (2, a), (2, b), (2, c), (2, d), (3, a), (3, b), (3, c), (3, d)\}$

Definisi 45 Relasi

Misalkan A dan B himpunan. Relasi dari A ke B adalah subset dari $A \times B$.

Dengan definisi ini, berarti relasi lebih luas semesta pembicaraannya dibandingkan dengan fungsi. Atau dengan kata lain, fungsi merupakan relasi dengan syarat khusus.

Contoh 46 Relasi

$A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{a, b, c, d\}$, relasi dari A dan B didefinisikan sebagai $R = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, c), (2, b)\}$

Lambang Relasi biasanya dinyatakan oleh huruf R (R kapital). Sehingga pada contoh di atas didapat: $(1, a) \in R$ atau dapat pula ditulis $1Ra$, $(1, c) \notin R$ atau dapat ditulis $1 \not\backslash c$ Sifat-sifat relasi: refleksif, simetrik, anti simetrik, dan transitif.

Bagian II

Struktur Aljabar

Bab 3

Group

Bab 4

Sub Group

Bab 5

Semi Group

Bab 6

Homomorphism

Bab 7

Relasi Kongruen

Bagian III

Kombinatorial

Bab 8

Aturan Perkalian

Bab 9

Sample Terurut dan Permutasi

Bab 10

Sample tak Terurut tanpa Pengulangan

Bab 11

Sample tak Terurut dengan Pengulangan

Bagian IV

Graph

Bab 12

Keterhubungan

Bab 13

Graph Planar

Bab 14

Representasi Komputer untuk Graph

Bab 15

Path

Bab 16

Cycle

Bab 17

Tree dan Spanning Tree

Bab 18

Masalah minimal spanning Tree

Bab 19

Tree biner dan penelusurannya

Bab 20

Algoritma Dijkstra

Appendix